

**Câu I.** (2.5 điểm)

- a) Trong  $\mathbb{Z}_{26}$  cho ma trận  $K = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Hãy sử dụng mật mã Hill với khóa  $K$  để mã hóa tin nhắn "TOAN" và giải mã tin nhắn "ZHYP". Cho biết bảng chữ cái được số hóa như bảng sau đây:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- b) Ký hiệu  $M_n(\mathbb{R})$  là tập tất cả ma trận vuông cấp  $n$  với phần tử số thực. Đặt  $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A^2) = 1\}$ . Phép nhân ma trận trên  $M_n(\mathbb{R})$  có phải là một phép toán hai ngôi trên  $S$  không? Chứng minh rằng  $S$  cùng với phép nhân ma trận trên  $M_n(\mathbb{R})$  tạo thành một nhóm.

**Câu II.** (3 điểm): Cho ánh xạ tuyến tính  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(x)$  xác định bởi :

$$f(u) = (a+b-c) + (a-2b+2c)x + (2a-b+c)x^2, \quad \forall u = (a \ b \ c)^T \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Vector  $u = 1 + 2x + 3x^2$  có thuộc  $\text{Im}(f)$ .  
b) Tìm một cơ sở và số chiều của  $\text{Ker}(f)$ .  
c) Đặt  $W = \{p(x) \in P_2(x) / p(1) + p'(1) = 0\}$ . Chứng minh  $W$  là không gian con của  $P_2(x)$  và tìm một cơ sở của  $W$ .

**Câu III.** (3.5 điểm): Cho dạng toàn phương  $Q(X) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2$ , trong đó

$X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ . Gọi  $A$  là ma trận của  $Q$ .

- a) Tìm một cơ sở của  $\text{Col}A$ .  
b) Đưa dạng toàn phương  $Q(X)$  về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao và xét dấu dạng toàn phương.  
c) Tìm  $k$  để  $\det(kA^{10}) = 1$ .

**Câu IV.** ( 1.0 điểm ) : Cho ma trận  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ . Tìm điều kiện của tham số thực  $m$  để

hệ phương trình  $(A^2)X = 0$  có vô số nghiệm.

*Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

<b>Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)</b>	<b>Nội dung kiểm tra</b>
CLO1 : Biết cách giải một hệ phương trình tuyến tính; biết cách biểu diễn một hệ phương trình tuyến tính dạng vectơ, dạng ma trận, phép biến đổi tuyến tính; Thực hiện được các phép toán trên ma trận; tính được định thức;	Câu II, III, IV
CLO2: Thực hiện được các bài toán cơ bản về không gian vectơ: biểu diễn tuyến tính; kiểm tra tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính; kiểm tra tập sinh, tìm cơ sở, số chiều; tìm tọa độ, ma trận đổi đổi tọa độ;	Câu II, Câu III
CLO3: Biết cách tìm giá trị riêng, vectơ riêng của một ma trận, chéo hóa ma trận, đưa một dạng toàn phương về dạng không có hạng tử tích chéo, tìm dấu của một dạng toàn phương.	Câu III
CLO4: Thực hiện được các tính toán liên quan đến tích vô hướng Euclide: tính được tích vô hướng, độ dài, chuẩn; kiểm tra tính trực giao, trực chuẩn; tìm được phần bù trực giao, hình chiếu trực giao; trực giao hóa một hệ vectơ cơ sở.	Câu II
CLO5: Biết cách kiểm tra các tính chất của một phép toán hai ngôi; kiểm tra nhóm, vành, trường; khái niệm mật mã, mật mã đối xứng, mật mã khóa bất đối xứng, một số hệ mã Affine, Hill, RSA.	Câu I

Ngày 05 tháng 04 năm 2026  
**Trưởng bộ môn**

**Phạm Văn Hiến**